

Рассеяние электрона на встречном пучке лазерного излучения.

Николай Мучной*

13 ноября 2015 г.

1 Кинематика и сечение рассеяния

На Рис. 1 приведена иллюстрация к процессу комптоновского рассеяния ультра-релятивистского электрона с энергией ε_0 и “мягкого” фотона с энергией ω_0 . В рассматриваемом случае величина ω_0 играет пренебрежимо малую роль в энергетическом балансе системы, а электрон передает часть своей энергии рассеянному фотону, так что $\varepsilon_0 = \varepsilon + \omega$.

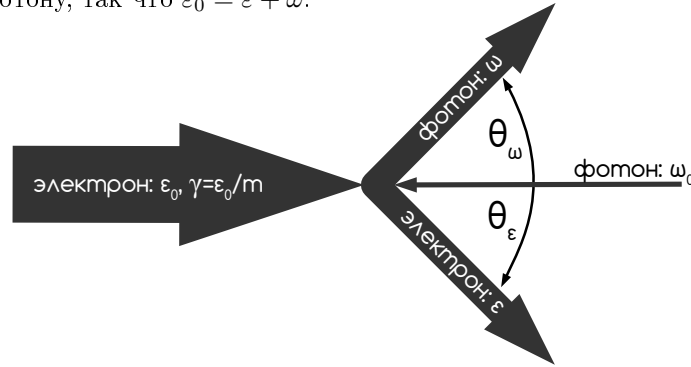


Рис. 1: Кинематика рассеяния: толщина стрелок на рисунке условно пропорциональна энергиям частиц.

Введем параметр u , область определения которого следует из кинематики рассеяния:

$$u = \frac{\omega}{\varepsilon} = \frac{\theta_\varepsilon}{\theta_\omega} = \frac{\omega}{\varepsilon_0 - \omega} = \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{\varepsilon}; \quad u \in [0, \kappa], \quad \text{где } \kappa = \frac{4\omega_0\varepsilon_0}{m^2}, \quad (1)$$

а m – энергия покоя электрона. Углы рассеяния фотона и электрона, соответственно:

$$\theta_\omega(u) = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{\kappa}{u} - 1}; \quad \theta_\varepsilon(u) = \frac{u}{\gamma} \sqrt{\frac{\kappa}{u} - 1}, \quad \text{где } \gamma = \varepsilon_0/m. \quad (2)$$

Дифференциальное и полное сечение рассеяния (для неполяризованных частиц):

$$d\sigma = \frac{2\pi r_e^2}{\kappa(1+u)^2} \left(2 + \frac{u^2}{1+u} + 4\frac{u}{\kappa} \left[\frac{u}{\kappa} - 1 \right] \right) du, \quad (3)$$

$$\sigma(\kappa) = \int_0^\kappa \frac{d\sigma}{du} du = \frac{2\pi r_e^2}{\kappa} \left(\left[1 - \frac{4}{\kappa} - \frac{8}{\kappa^2} \right] \log(1+\kappa) + \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{(1+\kappa)^2} \right] + \frac{8}{\kappa} \right). \quad (4)$$

Первые члены разложения (4) по κ ($\kappa \ll 1$) дают:

$$\sigma(\kappa) \simeq \frac{8}{3} \pi r_e^2 (1 - \kappa) \simeq \sigma_T, \quad (5)$$

где σ_T – томсоновское сечение. При рассеянии фотона в направлении импульса начального электрона ($\theta_\omega = \theta_\varepsilon = 0$, $u = \kappa$) энергия рассеянного фотона максимальна:

$$\omega_{\max} = \varepsilon_0 \frac{\kappa}{1+\kappa} \simeq 4\gamma^2 \omega_0. \quad (6)$$

*muchnoi@inp.nsk.su

Вычислим еще несколько интегралов ($\kappa \ll 1$, результаты понадобятся чуть позже):

$$\int_0^{\kappa} \omega(u) \frac{d\sigma}{du} du = \int_0^{\kappa} \left[\frac{u\varepsilon_0}{1+u} \right] \frac{d\sigma}{du} du \simeq \frac{4}{3} \pi r_e^2 \varepsilon_0 (\kappa + \mathcal{O}(\kappa^2)) \simeq 2 (\gamma^2 \omega_0) \sigma_T, \quad (7)$$

$$\int_0^{\kappa} \omega^2(u) \frac{d\sigma}{du} du = \int_0^{\kappa} \left[\frac{u\varepsilon_0}{1+u} \right]^2 \frac{d\sigma}{du} du \simeq \frac{14}{15} \pi r_e^2 \varepsilon_0^2 (\kappa^2 + \mathcal{O}(\kappa^3)) \simeq \frac{28}{5} (\gamma^2 \omega_0)^2 \sigma_T, \quad (8)$$

$$\int_0^{\kappa} \frac{\theta_e^2(u)}{2} \frac{d\sigma}{du} du = \int_0^{\kappa} \left[\frac{u(\kappa-u)}{2\gamma^2} \right] \frac{d\sigma}{du} du \simeq \frac{\pi r_e^2}{5\gamma^2} (\kappa^2 + \mathcal{O}(\kappa^3)) \simeq \frac{6}{5} \left(\frac{\omega_0}{m} \right)^2 \sigma_T. \quad (9)$$

2 Вероятность рассеяния

2.1 Непрерывный лазер

При движении электрона вдоль оси встречного излучения непрерывного ТЕМ₀₀ лазера вероятность рассеяния на отрезке $s \in [-a : a]$ определяется сечением рассеяния и плотностью лазерной мишени:

$$W = \frac{P_L \lambda \sigma_T}{\pi \hbar c^2} \int_{-a}^a \frac{ds}{\sigma(s)^2} = \frac{4P_L \sigma_T}{\hbar c^2} \int_{-a/Z_R}^{a/Z_R} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{P_L}{P_C} \cdot \frac{\arctg(a/Z_R)}{\pi/2} \xrightarrow{a \gg Z_R} \frac{P_L}{P_C}, \quad \text{где} \quad (10)$$

- P_L , [Вт] и λ , [м] – мощность и длина волны излучения лазера;
- $P_L \lambda / \hbar c^2$, [м⁻¹] – продольная плотность лазерных фотонов;
- $\sigma_T = 8\pi r_e^2 / 3 = 0.66525 \cdot 10^{-28}$ [м²] – томсоновское сечение;
- $\sigma(s) = \sigma_0 \sqrt{1 + (s/Z_R)^2}$ – среднеквадратичный поперечный размер лазерного луча;
- σ_0 , [м] – среднеквадратичный поперечный размер лазерного луча в точке фокуса ($s = 0$);
- $Z_R = 4\pi\sigma_0^2 / \lambda$ – рэлеевская длина;
- $P_C = \hbar c^2 / 2\sigma_T \simeq 0.71237 \cdot 10^{11}$, [Вт] – характерная мощность излучения лазера, при которой вероятность рассеяния близка к 100%.

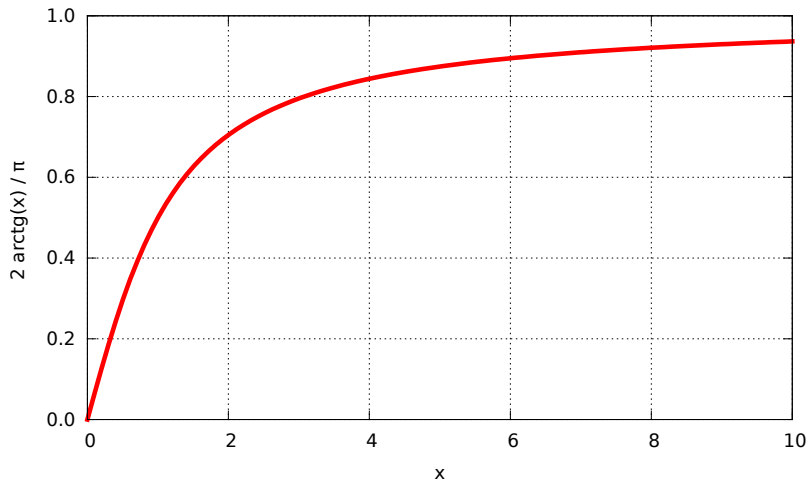


Рис. 2: Зависимость второго множителя в выражении (10) от отношения a/Z_R .

2.2 Импульсный лазер

Опишем распространение лазерного импульса (с энергией E_L и длительностью τ_L) выражением:

$$\rho_\gamma(s, t) = \frac{N_\gamma}{\sqrt{2\pi c\tau_L}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{s-ct}{c\tau_L}\right)^2\right\}, \quad \text{где } N_\gamma = E_L\lambda/hc. \quad (11)$$

При движении ультра-релятивистского электрона ($s_e = s + ct$) вдоль оси встречного импульса излучения ТЕМ₀₀ лазера, вероятность томсоновского рассеяния на отрезке $s \in [-a : a]$ составит¹:

$$W = \frac{N_\gamma\sigma_T}{\pi\sqrt{2\pi c\tau_L}\sigma_0^2} \int_{-a}^a \frac{\exp\{-2(s/c\tau_L)^2\}}{1 + (s/Z_R)^2} ds. \quad (12)$$

Воспользовавшись величиной P_C из (10) и вводя параметр $\tau_R = Z_R/c$, запишем (12) в виде:

$$W = \frac{E_L/\tau_L}{\sqrt{2\pi}P_C} \int_{-a/Z_R}^{a/Z_R} \frac{\exp\{-2(x\tau_R/\tau_L)^2\}}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{E_L/\tau_L}{\sqrt{2\pi}P_C} \cdot \mathcal{F}(\tau_R/\tau_L) \xrightarrow{a \gg Z_R \gtrsim c\tau_L} \frac{E_L}{2\pi\tau_R P_C} = \frac{P'_L}{P_C}, \quad (13)$$

где $P'_L = E_L/(2\pi\tau_R)$ – эквивалентная мощность излучения, определяемая энергией импульса и фокусировкой лазерного луча. На Рис. 3 представлен график функции $\mathcal{F}(\tau_R/\tau_L)$, вычисленной для случая $a \gg Z_R$. Если рэлеевская длина больше длины лазерного импульса ($\tau_R \gtrsim \tau_L$), получаем $\mathcal{F}(\tau_R/\tau_L) \simeq (\sqrt{2\pi}\tau_R/\tau_L)^{-1}$.

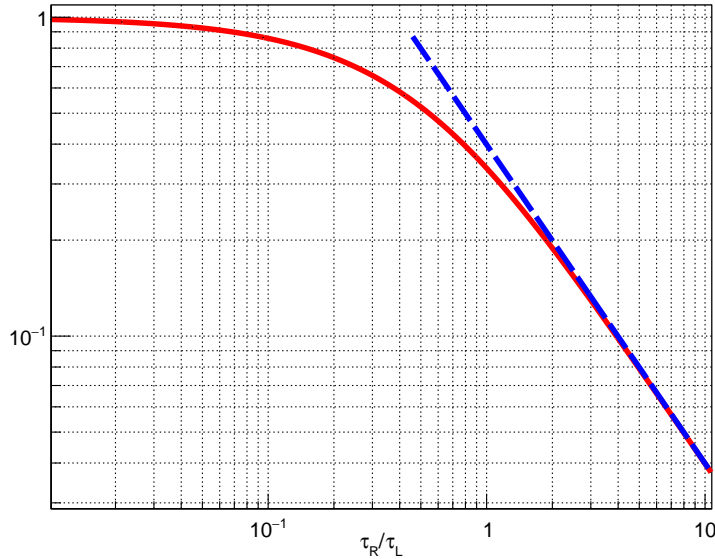


Рис. 3: Сплошная линия – $\mathcal{F}(\tau_R/\tau_L)$, пунктир – $(\sqrt{2\pi}\tau_R/\tau_L)^{-1}$.

2.3 Средняя потеря энергии электроном

Поделив (7) на (5) получаем среднее значение энергии, теряемой электроном в одном акте рассеяния: $\langle\omega\rangle \simeq \omega_{\max}/2 = 2\gamma^2\omega_0$. Средняя потеря энергии электрона $\langle\Delta E_T\rangle$ при его пролете через лазерную мишень будет определяться произведением вероятности рассеяния W на величину $\langle\omega\rangle$. Для непрерывного либо импульсного² лазера из (10) и (13) получаем, соответственно:

$$\langle\Delta E_T\rangle = 2\omega_0\gamma^2 \frac{P_L}{P_C}; \quad \langle\Delta E_T\rangle = 2\omega_0\gamma^2 \frac{P'_L}{P_C}. \quad (14)$$

¹Релятивистское преобразование удваивает плотность лазерной мишени.

²В работе [1] этот же результат выглядит так: $\langle\Delta E_T\rangle = \frac{32\pi}{3}r_e^2\gamma^2 \frac{E_L}{Z_R\lambda}$.

Пусть электронный пучок вращается в накопительном кольце и взаимодействие с лазерным излучением происходит на каждом обороте. Сравним $\langle \Delta E_T \rangle$ с пооборотными потерями энергии электрона на синхротронное излучение в изомагнитном накопителе:

$$\langle \Delta E_{SR} \rangle = \frac{4\pi}{3} \alpha \hbar c \frac{\gamma^4}{R}, \quad (15)$$

где R – радиус орбиты электрона, α – постоянная тонкой структуры. Определим пороговую мощность (P_L или P'_L) излучения P_L^* , при которой $\langle \Delta E_T \rangle = \langle \Delta E_{SR} \rangle$:

$$P_L^* = \frac{c}{8\alpha} \frac{E^2}{\omega_0 R}, \quad (16)$$

где $E = \gamma mc^2$ – средняя энергия электрона в накопителе. Так, например, для $E = 100$ МэВ, $\omega_0 = 1.165$ эВ, $R = 10$ м получаем $P_L^* \simeq 700$ кВт. Чтобы получить такую мощность (P'_L) из лазерного импульса с энергией $E_L = 10$ мкДж и длительностью $\tau_L = 1$ пс, необходимо обеспечить параметры фокусировки не хуже $\tau_R = 10$ пс, $Z_R = 3$ мм, $\sigma_0 = 16$ мкм ($\lambda = 1$ мкм).

2.4 Влияние рассеяния на динамику электронного пучка

Если мощность лазерного излучения существенно превосходит пороговое значение (16), роль синхротронного излучения в динамике пучка электронов перестает быть определяющей. В работе [1] исследован вопрос формирования равновесного эмиттанта и энергетического разброса пучка в накопителе, в котором потери на томсоновское рассеяние доминируют. Предполагается, что в области взаимодействия электронов с лазерным излучением у электронного пучка нет поперечной дисперсии. Декременты затухания поперечных и продольных колебаний определяются средними потерями энергии на излучение:

$$\Gamma_{x,y}^T \equiv -\frac{1}{\epsilon_{x,y}^n} \left\langle \frac{d\epsilon_{x,y}^n}{dt} \right\rangle = \frac{\langle \Delta E_T \rangle / E}{T}, \quad (17)$$

$$\Gamma_s^T \equiv -\frac{1}{\sigma_E^2} \left\langle \frac{d\sigma_E^2}{dt} \right\rangle = 2 \frac{\langle \Delta E_T \rangle / E}{T}, \quad (18)$$

где $\epsilon_{x,y}^n$, σ_E и T – нормализованные поперечные эмиттансы, энергетический разброс и период обращения пучка соответственно. Квантовая раскачка бетатронных колебаний, в отличие от синхротронного излучения, одинакова по обоим координатам:

$$\left\langle \frac{d\epsilon_{x,y}^n}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \frac{\gamma \beta_{x,y}}{2} \left[\frac{\langle \Delta E_T \rangle}{2\gamma^2 \omega_0} \right] \frac{1}{\sigma_T} \int_0^\kappa \frac{\theta_\varepsilon^2(u)}{2} \frac{d\sigma_T}{du} du = \frac{3}{10} \frac{\omega_0}{m} \frac{\langle \Delta E_T \rangle}{E} \frac{\beta_{x,y}}{T}, \quad (19)$$

где $\beta_{x,y}$ – бета-функции пучка в области рассеяния, выражение в квадратных скобках – вероятность рассеяния, интегрирование – см. выражение (9). В продольном направлении рассеяние ведет к росту энергетического разброса, и, с учетом (8), получим:

$$\left\langle \frac{d\sigma_E^2}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \left[\frac{\langle \Delta E_T \rangle}{2\gamma^2 \omega_0} \right] \frac{1}{\sigma_T} \int_0^\kappa \omega^2(u) \frac{d\sigma_T}{du} du = \frac{7}{10} \frac{\langle \Delta E_T \rangle}{T} \omega_{\max}. \quad (20)$$

Если динамика пучка обусловлена исключительно томсоновским рассеянием, из выражений (17, 19) и (18, 20) получим выражения для равновесных (минимальных) значений нормализованного эмиттанта и энергетического разброса:

$$(\epsilon_{x,y}^n)_{\min} = \frac{3}{10} \frac{\omega_0}{m} \beta_{x,y}; \quad \left(\frac{\sigma_E}{E} \right)_{\min} = \sqrt{\frac{7}{5}} \frac{\omega_0}{m} \gamma. \quad (21)$$

“Лазерное охлаждение” можно попытаться применить для формирования малого поперечного эмиттанта вкуче с большим энергетическим разбросом:

$$(\epsilon_{x,y})_{\min} \equiv \frac{(\epsilon_{x,y}^n)_{\min}}{\gamma} = \frac{3}{10} \frac{\omega_0}{E} \beta_{x,y}; \quad \left(\frac{\sigma_E}{E} \right)_{\min} = \sqrt{\frac{7}{20}} \kappa. \quad (22)$$

Список литературы

[1] Zhirong Huang, Ronald D. Ruth. PRL V. 80, No. 5 (1998), pp. 976–979.