

Обратный Комптон-эффект.

Николай Мучной*

7 июля 2016 г.

1 Кинематика

Кинематика процесса комптоновского рассеяния определяется законом сохранения импульса:

$$p_0 + k_0 = p + k, \quad (1)$$

где $p_0 = (\varepsilon_0, \vec{p}_0)$ и $k_0 = (\omega_0, \vec{k}_0)$ — четырёхимпульсы электрона и фотона до, а $p = (\varepsilon, \vec{p})$ и $k = (\omega, \vec{k})$ — после рассеяния. Переноса k из правой части (1) налево и возводя в квадрат получаем:

$$p_0 k_0 - p_0 k - k_0 k = 0, \quad (2)$$

или, полагая $c = 1$,

$$\varepsilon_0 \omega_0 - |\vec{p}_0| \omega_0 \cos \alpha - \varepsilon_0 \omega + |\vec{p}| \omega \cos \theta - \omega_0 \omega (1 - \cos \Theta) = 0. \quad (3)$$

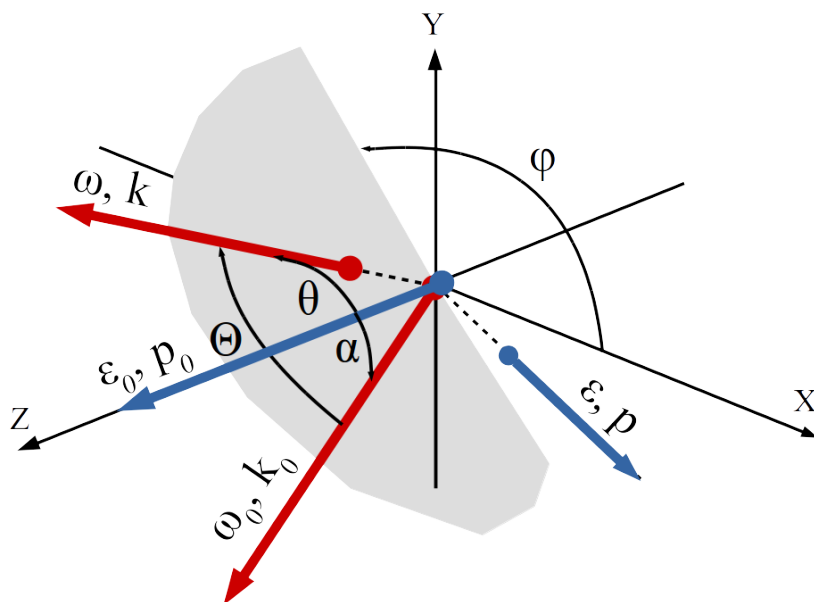


Рис. 1: Кинематика комптоновского рассеяния.

*muchnoi@inp.nsk.su

Введены следующие обозначения углов (см. Рис. 1):

α – угол между импульсами электрона и фотона до рассеяния,

θ – угол между импульсами начального электрона и рассеянного фотона,

Θ – угол между импульсами начального и рассеянного фотонов,

φ – угол между плоскостью XZ и плоскостью рассеяния.

Из (3) получаем выражение для энергии рассеянного фотона:

$$\omega = \omega_0 \frac{1 - \beta \cos \alpha}{1 - \beta \cos \theta + \frac{\omega_0}{\varepsilon_0} (1 - \cos \Theta)}, \quad (4)$$

где β – скорость электрона в единицах c . При рассеянии на покоящемся электроне $\beta = 0$ и из (4) получаем классическую формулу Комптона:

$$\omega = \omega_0 \frac{1}{1 + \frac{\omega_0}{m} (1 - \cos \Theta)}. \quad (5)$$

Перейдем в систему покоя электрона (СПЭ), движущегося вдоль оси Z .

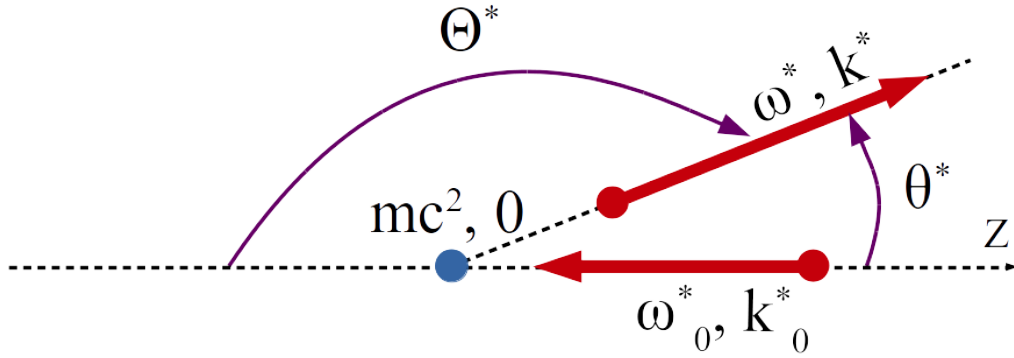


Рис. 2: Кинематика комптоновского рассеяния в системе покоя электрона.

В СПЭ энергию и импульс фотона получим из преобразований Лоренца¹:

$$\begin{aligned} \omega_0^* &= \gamma \omega_0 (1 - \beta \cos \alpha) \simeq 2\gamma \omega_0 \sin^2(\alpha/2), \\ k_{\parallel}^* &= \gamma \omega_0 (\cos \alpha - \beta) \simeq -2\gamma \omega_0 \sin^2(\alpha/2), \\ k_{\perp}^* &= \omega_0 \sin \alpha, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2} = \varepsilon_0/m$. Приближение в (6) соответствует ультра-релятивистскому случаю $\beta \simeq 1$. В СПЭ угол α^* между импульсами электрона и фотона до рассеяния определяется выражением (7), причем $\alpha^* \simeq \pi$ если $\gamma \cdot \text{tg}(\alpha/2) \gg 1$.

$$\alpha^* = \pi - \arctg \frac{k_{\perp}^*}{|k_{\parallel}^*|} \simeq \pi - \arctg \left(\frac{1}{2\gamma} \frac{\sin \alpha}{\sin^2(\alpha/2)} \right) \simeq \pi - \frac{1}{\gamma \cdot \text{tg}(\alpha/2)} \simeq \pi. \quad (7)$$

Кинематика рассеяния в СПЭ описывается формулой (5) и представлена на Рис. 2 ($\alpha^* = \pi$):

$$\omega^* = \omega_0^* \frac{1}{1 + \frac{\omega_0^*}{m} (1 - \cos \Theta^*)} = \omega_0^* \frac{1}{1 + \frac{\omega_0^*}{m} (1 + \cos \theta^*)} \quad (8)$$

¹ Преобразования Лоренца: $E' = \gamma(E - vp_z)$, $p'_z = \gamma(p_z - vE/c^2)$, $p'_x = p_x$, $p'_y = p_y$.

В лабораторной системе отсчета (ЛСО) получим:

$$\begin{aligned}\omega &= \gamma\omega^*(1 + \beta \cos \theta^*) = \gamma\omega^*(1 - \beta \cos \Theta^*) \\ k_{\parallel} &= \gamma\omega^*(\beta + \cos \theta^*) = \gamma\omega^*(\beta - \cos \Theta^*) \\ k_{\perp} &= \omega^* \sin \theta^* = \omega^* \sin \Theta^*\end{aligned}\quad (9)$$

Угол θ между импульсами начального электрона и рассеянного фотона в ЛСО (для $\beta = 1$):

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}} \simeq \frac{1}{\gamma} \frac{\sin \theta^*}{1 + \cos \theta^*} = \frac{1}{\gamma} \operatorname{tg} \frac{\theta^*}{2} = \frac{1}{\gamma \operatorname{tg}(\Theta^*/2)} \quad (10)$$

В релятивистском случае $\operatorname{tg} \theta \simeq \theta$ и, вводя новую переменную $\boxed{\eta = \gamma\theta}$, получим:

$$\begin{aligned}\Theta^* &= 2 \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{\eta} \\ \cos \Theta^* &= \frac{\eta^2 - 1}{\eta^2 + 1} \\ 1 - \cos \Theta^* &= \frac{2}{\eta^2 + 1}\end{aligned}\quad (11)$$

Запишем зависимость энергии рассеянного фотона в ЛСО (ω) от η , подставив $(1 - \cos \Theta^*)$ из (11) и ω_0^* из (6) в выражение для ω из (9). Получим:

$$\omega(\eta) = \varepsilon_0 \frac{\kappa}{1 + \kappa + \eta^2}, \quad \text{где } \boxed{\kappa = \frac{4\varepsilon_0\omega_0}{m^2} \sin^2(\alpha/2)}. \quad (12)$$

Максимальная энергия у фотона получается когда $\eta = 0$. Соответственно, (12) можно записать и так:

$$\omega(\eta) = \frac{\omega_{max}}{1 + (\eta/\theta_c)^2}, \quad \text{где } \boxed{\omega_{max} = \varepsilon_0 \frac{\kappa}{1 + \kappa}}, \quad \text{а } \boxed{\theta_c = \frac{1}{\gamma} \sqrt{1 + \kappa}}. \quad (13)$$

Параметр θ_c определяет характерный угол рассеяния фотонов. Заметим, что выражения (12) и (13) несложно получить непосредственно из уравнения (4). Связь между углом рассеяния фотона в СПЭ (Θ^*) и его энергией в ЛСО (ω) получим, подставив ω^* из (8) в выражение для ω из (9):

$$\cos \Theta^* = \frac{\varepsilon_0 - \omega(1 + 2/\kappa)}{\varepsilon_0 - \omega} = 1 - \frac{2u}{\kappa}, \quad \text{где } \boxed{u = \frac{\omega}{\varepsilon_0 - \omega} = \frac{\omega}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{\varepsilon}}. \quad (14)$$

Параметр u максимален, когда $\Theta^* = \pi$: $u_{max} = \kappa$. Зависимость от угла рассеяния: $u(\eta) = \kappa/(1 + \eta^2)$.

2 Рассеяние без учета поляризации

Сечение комптоновского рассеяния определяется формулой Клейна-Нишины. Сохраняя введенные в предыдущем разделе обозначения, запишем дифференциальное сечение в СПЭ²:

$$d\sigma = \frac{r_e^2}{2} \left(\frac{\omega^*}{\omega_0^*} \right)^2 \left(\frac{\omega_0^*}{\omega^*} + \frac{\omega^*}{\omega_0^*} - \sin^2 \Theta^* \right) d\Omega^*, \quad (15)$$

где r_e – классический радиус электрона, $d\Omega^* = \sin \Theta^* d\Theta^* d\varphi$. Найдем вид сечения в ЛСО. Из выражений (6, 8, 11) следует, что

$$\frac{\omega^*}{\omega_0^*} = \frac{1 + \eta^2}{1 + \eta^2 + \kappa} = \frac{V}{K}, \quad (16)$$

² иногда сечение записывают по-другому, используя равенство $\frac{\omega_0^*}{\omega^*} + \frac{\omega^*}{\omega_0^*} - 2 = (\omega_0^* - \omega^*)(1 - \cos \Theta^*)$

где $V = 1 + \eta^2$ и $K = 1 + \eta^2 + \kappa$ – безразмерные параметры. Как следует из (11):

$$\begin{aligned}\sin \Theta^* &= \sqrt{1 - \cos^2 \Theta^*} = \frac{2\eta}{V}, \\ d\Theta^* &= d\left(\arccos \frac{\eta^2 - 1}{\eta^2 + 1}\right) d\eta = -\frac{2}{V} d\eta, \\ \sin \Theta^* d\Theta^* &= -\frac{4\eta}{V^2} d\eta.\end{aligned}\tag{17}$$

Проинтегрировав по φ , запишем конечный результат:

$$d\sigma = 4\pi r_e^2 \frac{\eta}{K^2} \left(\frac{V}{K} + \frac{K}{V} - \frac{4\eta^2}{V^2} \right) d\eta.\tag{18}$$

Выразим сечение через энергию рассеянного фотона. Из (11) и (14) получим связь между η и u :

$$\frac{\eta^2 - 1}{\eta^2 + 1} = 1 - 2\frac{u}{\kappa}.$$

Запишем результаты промежуточных вычислений:

$$\eta^2 = \frac{\kappa}{u} - 1; \quad V = \frac{\kappa}{u}; \quad K = \frac{\kappa}{u} + \kappa; \quad d\eta = \frac{\kappa}{2u^2 \sqrt{\kappa/u - 1}} du.$$

Подставляя все это в (18) получим:

$$d\sigma = \frac{2\pi r_e^2}{\kappa(1+u)^2} \left[2 + \frac{u^2}{1+u} + 4\frac{u}{\kappa} \left(\frac{u}{\kappa} - 1 \right) \right] du.\tag{19}$$

С учетом того, что $du/d\omega = \varepsilon_0/(\varepsilon_0 - \omega)^2$, а $(1+u)^2 = (\varepsilon_0/(\varepsilon_0 - \omega))^2$, получаем искомое сечение:

$$d\sigma = \frac{2\pi r_e^2}{\kappa \varepsilon_0} \left[2 + \frac{u^2}{1+u} + 4\frac{u}{\kappa} \left(\frac{u}{\kappa} - 1 \right) \right] d\omega.\tag{20}$$

3 Поляризационные эффекты

Поляризация исходного излучения описывается вектором Стокса $\vec{\xi} = [\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3]$. Параметры Стокса определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}\xi_0 &= E_x^2 + E_y^2, \\ \xi_1 &= E_x^2 - E_y^2, \\ \xi_2 &= 2E_x E_y \cos \delta, \\ \xi_3 &= 2E_x E_y \sin \delta,\end{aligned}\tag{21}$$

где E_x и E_y – ортогональные компоненты амплитуд напряженностей электрического поля электромагнитной волны в выбранной системе координат xy , δ – разность фаз между ними (волна распространяется вдоль оси z). Для нормировки положим $\xi_0 = 1$. В общем случае интенсивность света складывается из трех компонент: линейно-поляризованной, циркулярно-поляризованной и неполяризованного света. Степень линейной поляризации определяется как $\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$, а ее ориентация – азимутальным углом ϕ . Если $\xi_1 = 1$ ($E_x = 1$) – свет 100% линейно поляризован вдоль оси x ($\phi = 0$), если $\xi_1 = -1$ ($E_y = 1$) – вдоль оси y ($\phi = \pi/2$). Если $\xi_2 = 1$ ($E_x = E_y = 1/\sqrt{2}$, $\delta = 0$) – свет 100% линейно поляризован в направлении $\phi = \pi/4$, если $\xi_2 = -1$ ($E_x = E_y = 1/\sqrt{2}$, $\delta = \pi$) – в направлении $\phi = -\pi/4$. Степень циркулярной поляризации определяется параметром ξ_3 . Если $E_x = E_y = 1/\sqrt{2}$ а $\delta = \pm\pi/2$ то $\xi_3 = \mp 1$. Знак параметра ξ_3 определяет направление вращения вектора электрического поля (спиральность). Величина $\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$ определяет полную степень поляризации света.

Поляризация электронного пучка определяется усредненным направлением спина электронов в выбранной системе прямоугольных координат $\vec{\zeta} = [\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z]$ (см. Рис. 1), причем полная степень поляризации пучка $\sqrt{\zeta_x^2 + \zeta_y^2 + \zeta_z^2} \in [0, 1]$.

3.1 Рассеяние поляризованного излучения

Продолжая использовать переменные с индексом (*) для описания переменных в СПЭ, запишем сечение рассеяния поляризованного фотона поляризованным электроном:

$$d\sigma(\vec{\xi}, \vec{\zeta}) = d\sigma(\vec{\xi}) + \frac{r_e^2}{2} \left(\frac{\omega^*}{\omega_0^*} \right)^2 \xi_3 (\vec{f} \cdot \vec{\zeta}) d\Omega^* , \quad (22)$$

где $d\sigma(\vec{\xi})$ не зависит от поляризации электронов:

$$d\sigma(\vec{\xi}) = \frac{r_e^2}{2} \left(\frac{\omega^*}{\omega_0^*} \right)^2 \left(\frac{\omega_0^*}{\omega^*} + \frac{\omega^*}{\omega_0^*} - (1 - \xi_1) \sin^2 \Theta^* \right) d\Omega^* . \quad (23)$$

Вектор \vec{f} в уравнении (22) определяется кинематикой рассеяния:

$$\vec{f} = -\frac{1}{m} (1 - \cos \Theta^*) (k_0^* \cos \Theta^* + \vec{k}^*) . \quad (24)$$

Сечение (22) отличается от (23) только при наличии у фотона циркулярной поляризации, а у электрона – отличной от нуля проекции среднего спина на плоскость рассеяния. Сечение (23) отличается от “неполяризованного” сечения (18) только при наличии у начальных фотонов линейной поляризации.

Вместо параметра ξ_1 удобно использовать пару параметров $\xi^* = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$ и ϕ^* , определяющих соответственно полную степень линейной поляризации (лазерных) фотонов и ориентацию плоскости линейной поляризации света относительно направления $\varphi = 0$ в выбранной системе координат:

$$\xi_1 = \xi^* \cos(2(\varphi - \phi^*)) .$$

Перепишем сечение (23) в ЛСО с использованием введенных ранее переменных η, K, V, u :

$$\begin{aligned} d\sigma &= 2r_e^2 \frac{\eta}{K^2} \left[\frac{V}{K} + \frac{K}{V} - \frac{4\eta^2}{V^2} (1 - \xi^* \cos(2(\varphi - \phi^*))) \right] d\varphi d\eta, \\ d\sigma &= \frac{r_e^2}{\kappa(1+u)^2} \left[2 + \frac{u^2}{1+u} + 4\frac{u}{\kappa} \left(\frac{u}{\kappa} - 1 \right) (1 - \xi^* \cos(2(\varphi - \phi^*))) \right] d\varphi du. \end{aligned} \quad (25)$$

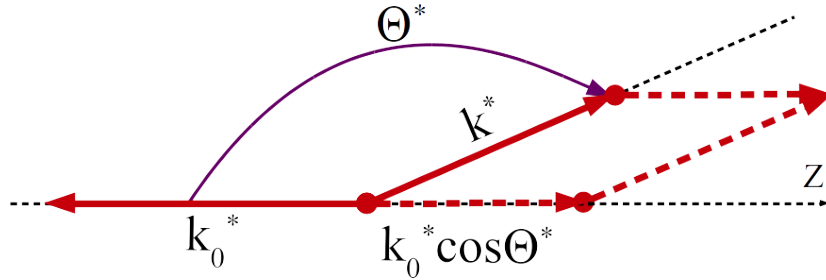


Рис. 3: K определению суммы $k_0^* \cos \Theta^* + \vec{k}^*$.

В соответствии с Рис. 3 найдем проекции вектора \vec{f} на оси Z, X, Y :

$$\begin{aligned} f_Z &= \frac{1 - \cos \Theta^*}{m} (\omega_0^* + \omega^*) \cos \Theta^* = \left(1 + \frac{V}{K} \right) \frac{\kappa(\eta^2 - 1)}{V^2} , \\ f_X &= -\frac{1 - \cos \Theta^*}{m} \omega^* \sin \Theta^* \cos \varphi = -\frac{2\kappa\eta}{KV} \cos \varphi , \\ f_Y &= -\frac{1 - \cos \Theta^*}{m} \omega^* \sin \Theta^* \sin \varphi = -\frac{2\kappa\eta}{KV} \sin \varphi . \end{aligned} \quad (26)$$

При выводе формул (26) использовалось, что $\omega_0^* = \kappa m/2$, а $\omega^* = \omega_0^* \cdot V/K$. При рассеянии циркулярно поляризованного света на электроне, спин которого направлен вдоль собственного импульса (лежит на оси Z – продольная поляризация), поляризационная добавка к сечению в ЛСО определяется формулами

(27). Поскольку в этом случае сечение не зависит от азимутального угла, произведено интегрирование по φ .

$$d\sigma_{\parallel} = 4\pi r_e^2 \xi_3 \zeta_{\parallel} \left(1 + \frac{V}{K}\right) \frac{\kappa \eta (\eta^2 - 1)}{K^2 V^2} d\eta, \quad (a)$$

$$d\sigma_{\parallel} = 2\pi r_e^2 \xi_3 \zeta_{\parallel} \frac{u(u+2)(\kappa-2u)}{\kappa^2(u+1)^3} du, \quad (b)$$

$$d\sigma_{\parallel} = 2\pi r_e^2 \xi_3 \zeta_{\parallel} \frac{u(u+2)(\kappa-2u)}{\kappa^2(u+1)} \cdot \frac{d\omega}{\varepsilon_0}. \quad (c)$$

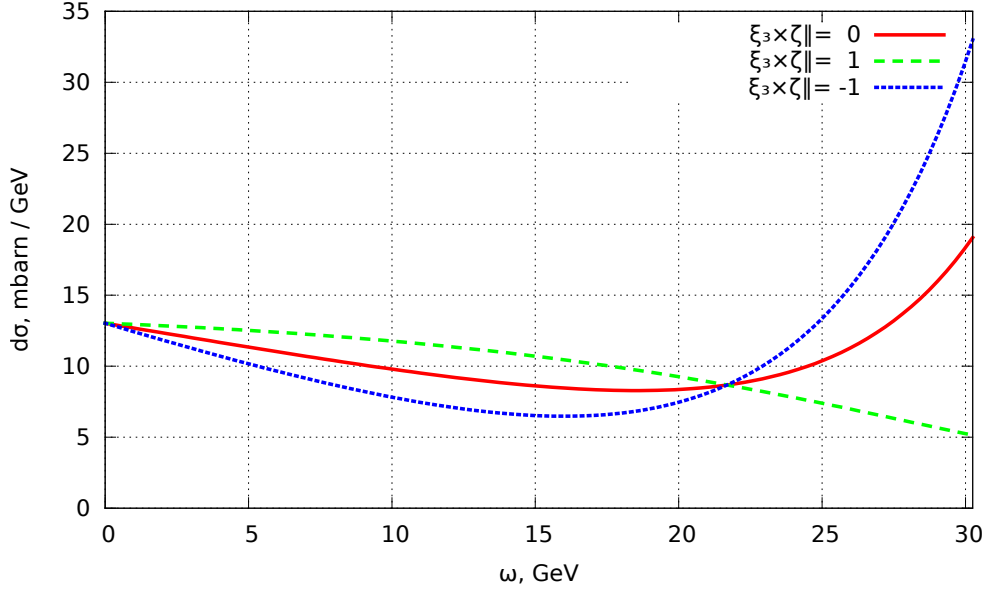


Рис. 4: Сечения рассеяния фотона (ф-лы 19 и 27с) $\omega_0 = 2$ эВ на электроне $\varepsilon_0 = 50$ ГэВ

При рассеянии циркулярно поляризованного света на электроне, спин которого направлен поперек собственного импульса (поперечная поляризация), поляризационная добавка к сечению в ЛСО определяется формулой (28). Видно, что при интегрировании по φ эта добавка к сечению равна нулю и не меняет зависимость сечения от энергии рассеянного фотона.

$$d\sigma_{\perp} = -4r_e^2 \xi_3 \zeta_{\perp} \frac{\kappa \eta^2}{V K^3} \sin \varphi d\varphi d\eta, \quad (a)$$

$$d\sigma_{\perp} = -2r_e^2 \xi_3 \zeta_{\perp} \frac{u^2 \sqrt{\kappa/u - 1}}{\kappa^2(1+u)^3} \sin \varphi d\varphi du. \quad (b)$$